

Anwendungen der Ableitung (vgl. LS11, Kapitel III)

(1) Monotonie

Wenn für eine Funktion f für alle x_1, x_2 aus einem Intervall I mit $x_1 < x_2$ gilt

$f(x_1) \leq f(x_2)$, dann heißt f **streng monoton steigend (sms)**

$f(x_1) \geq f(x_2)$, dann heißt f **streng monoton fallend (smf)**

Monotoniekriterium: Die Funktion f sei im Intervall I differenzierbar. Gilt für alle x aus I

$f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton steigend (sms)

$f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton fallend (smf)

(2) Extremwerte

Wechselt die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 mit waagrechter Tangente (also $f'(x_0) = 0$) ihr Vorzeichen von

$\left\{ \begin{array}{l} \oplus \text{ nach } \ominus, \text{ die Funktion also ihr Monotonieverhalten von } \mathbf{sms} \text{ nach } \mathbf{smf}, \text{ dann liegt ein lokales Maximum (Hochpunkt)} \\ \ominus \text{ nach } \oplus, \text{ die Funktion also ihr Monotonieverhalten von } \mathbf{smf} \text{ nach } \mathbf{sms}, \text{ dann liegt ein lokales Minimum (Tiefpunkt)} \end{array} \right\}$

an der Stelle x_0 vor.

(3) Krümmung, Wendepunkte (Stoff der 12.Jahrgangsstufe)

Die Funktion f sei im Intervall I zweimal differenzierbar. Gilt für alle x aus I

$f''(x) > 0$, dann ist der Graph von f auf I linksgekrümmt

$f''(x) < 0$, dann ist der Graph von f auf I rechtsgekrümmt

Die Stellen, an denen die zweite Ableitung von f ihr Vorzeichen ändert, der Graph also seine Krümmung wechselt, heißen **Wendestellen (-punkte)** der Funktion f .

Die Wendestellen sind die **Stellen stärkster oder geringster Steigung**, d.h. genau die **Extremstellen der ersten Ableitung** von f .

(4) Newton-Verfahren

Hat eine differenzierbare Funktion f eine Nullstelle x^* , so kann diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren ermittelt werden. Ist x_0 ein sinnvoll gewählter Näherungswert (Startwert) für die Nullstelle x^* , so kann man x_0 sukzessive verbessern durch die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(5) Funktionsuntersuchungen - Kurvendiskussion

Eine Funktion kann beispielsweise unter folgenden Aspekten untersucht werden:

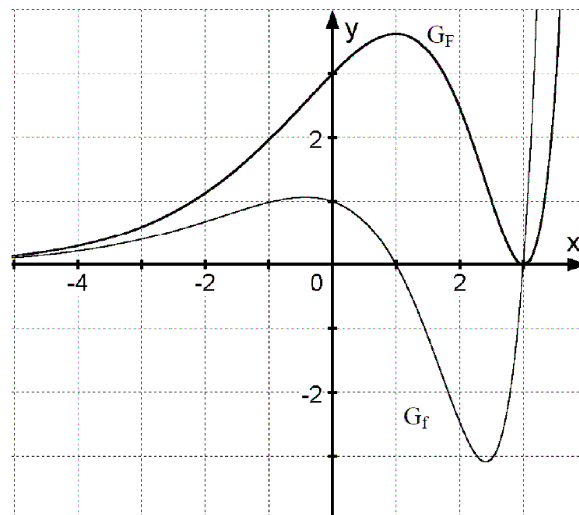
Definitionsmenge, Symmetrie zum Koordinatensystem, Schnittpunkte mit den Achsen, Verhalten an möglichen

Definitionslücken und im Unendlichen, Monotonie und Extremwerte, Krümmung und Wendepunkte (Jahrgangsstufe 12), Graph.

Beispiel-/Übungsaufgaben

1. Das Schaubild zeigt den Graphen G_f einer in ganz $\mathbb{R}$ definierten, stetigen Funktion f und den Graphen G_F einer Stammfunktion von F von f .

Erläutern Sie, dass das dargestellte Monotonieverhalten von G_F sowie das dargestellte Krümmungsverhalten von G_F in Einklang damit stehen, dass F Stammfunktion von f ist.
(Hinweis: Die Frage nach dem Krümmungsverhalten beinhaltet Stoff der 12. Jahrgangsstufe)



2. (Abitur Gk2002)

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a : x \mapsto e^x(x-a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und Definitionsmenge $D_a = \mathbb{R}$.

Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

- Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie das Verhalten von f_a für $x \rightarrow +\infty$.
- Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_a . Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_a und geben Sie die Lage des Wendepunktes an. [zur Kontrolle: $f'_a(x) = e^x(x-a+1)$]
- Zeigen Sie, dass der Graph G_1 in ganz $\mathbb{R}$ oberhalb von G_2 verläuft.
- Berechnen Sie $f_1(-3)$ und $f_1(2)$. Zeichnen Sie nun die Graphen G_1 und G_2 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-3 \leq x \leq 2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

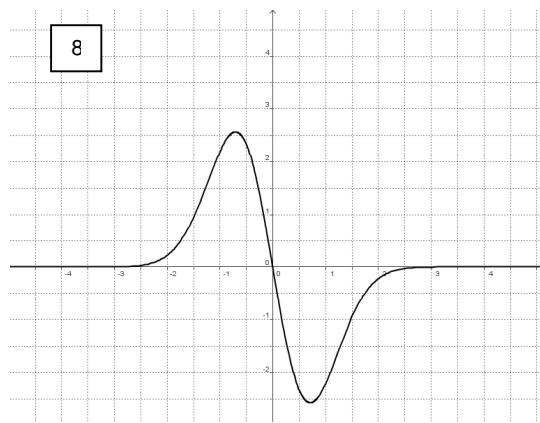
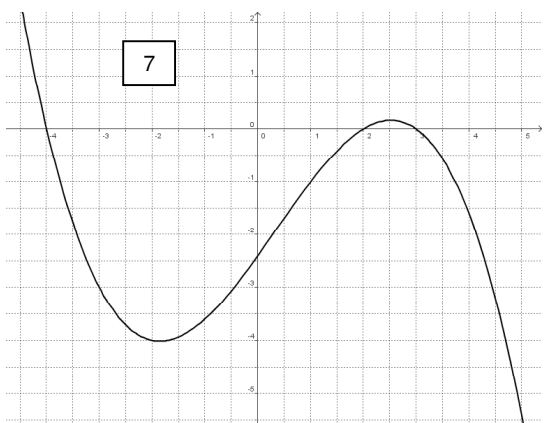
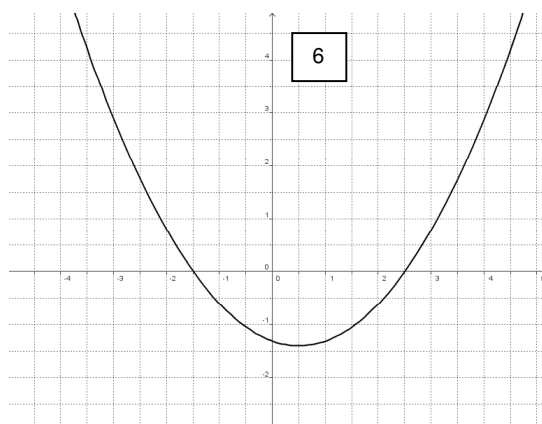
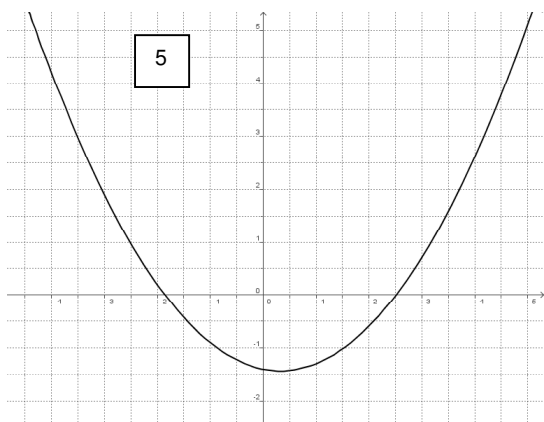
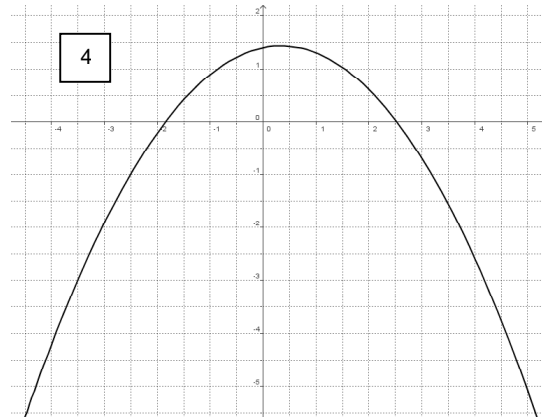
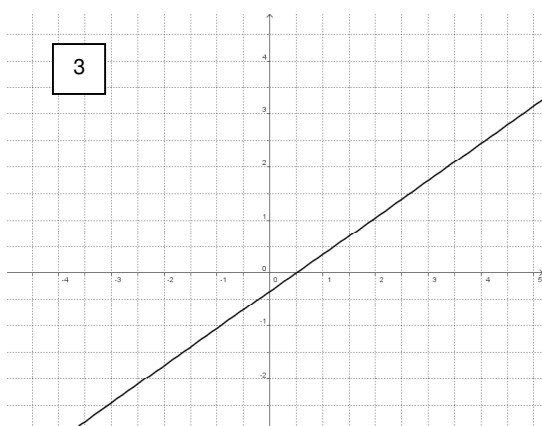
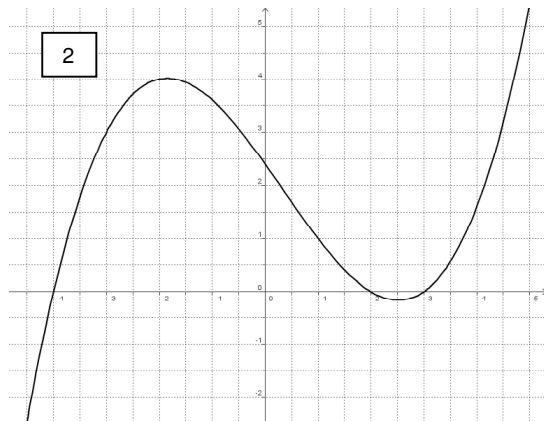
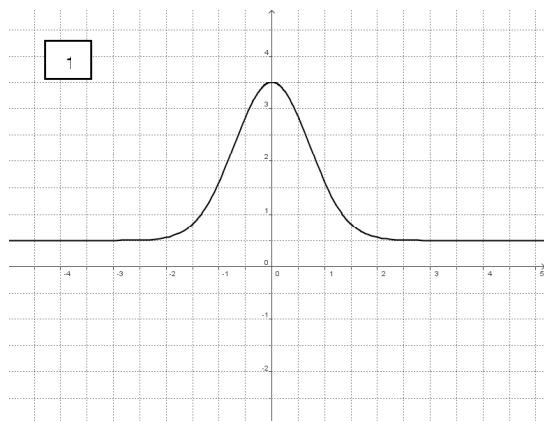
- Zeigen Sie, dass f_{a+1} für $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_a ist.
- Der Graph G_1 , die x -Achse und die y -Achse schließen im 4. Quadranten ein endliches Flächenstück vom Inhalt A ein. Berechnen Sie A .
- Der Flächeninhalt A aus Teilaufgabe 2b lässt sich durch den Flächeninhalt eines geeigneten Viertelkreises abschätzen. Um wie viel Prozent (auf eine Dezimale genau) weicht dieser Näherungswert vom exakten Wert ab?
- Beschreiben Sie, welche geometrische Bedeutung der folgende Ausdruck besitzt:

$$\int_{-3}^1 f_1(x) dx - \int_{-3}^2 f_2(x) dx$$

3. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x}$ auf Symmetrie, Nullstellen, Verhalten an möglichen Definitionslücken, Extrema. Skizzieren Sie dann den Graphen

4. Die Funktion $f(x) = \ln x - x + 3$ besitzt im Intervall $[4; 5]$ eine Nullstelle. Ermitteln Sie einen Näherungswert für diese Nullstelle auf zwei Dezimalen gerundet, indem Sie das Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 4,5$ einmal durchführen.

5. Gegeben sind die Graphen von Funktionen. Je zwei dieser Graphen bilden ein Paar aus Funktion und deren Ableitungsfunktion. Bestimme diese 4 Paare (Begründung!)



Lösungen

1. Monotonie:

$F' = f' > 0 \Rightarrow F$ streng monoton wachsend
 $f' > 0$ für $x \in]-\infty; 1[$ und $x \in]3; \infty[$
 $\Rightarrow F$ ist in diesen Intervallen streng monoton wachsend

$F' = f' < 0 \Rightarrow F$ streng monoton fallend
 $f' < 0$ für $x \in]1; 3[$
 $\Rightarrow F$ ist in diesem Intervall streng monoton fallend

Krümmung:

$F'' = f'' < 0 \Rightarrow F$ ist links gekrümmt bzw. $F'' = f'' < 0 \Rightarrow F$ ist rechts gekrümmt

Wir untersuchen die Steigung von f :

$f' > 0$ für $x \in]-\infty; x^{\max}[$ und $x \in]x^{\min}; \infty[\Rightarrow F$ ist in diesen Intervallen links gekrümmt

$f' < 0$ für $x \in]x^{\max}; x^{\min}[\Rightarrow F$ ist in diesen Intervallen rechts gekrümmt

$\Rightarrow$ bei $x^{\max}$ und $x^{\min}$ hat F Wendepunkte

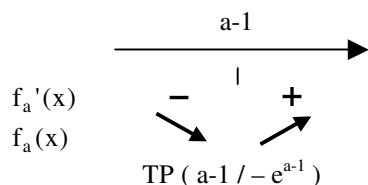
2. $f_a : x \mapsto e^x(x-a)$

a) NST ($a/0$); $S_y (0/-a)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = 0$

b) $f_a'(x) = e^x(x-a) + e^x \cdot 1 = e^x(x-a+1)$

$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-a+1) = 0 \Leftrightarrow x = a-1$

Monotonie:

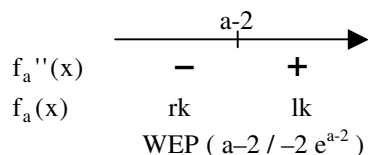


Zum Ermitteln der Monotonie muss eine Zahl kleiner bzw. größer als $a-1$ in f' eingesetzt werden, etwa $a-2$ bzw. a . Dies liefert als Werte $-e^{a-2} < 0$ bzw. $e^a > 0$.

Alternativ kann auch der Faktor $(x-a+1)$ als Term einer steigenden Gerade aufgefasst werden. Diese wechselt ihr Vorzeichen von $-$ auf $+$.

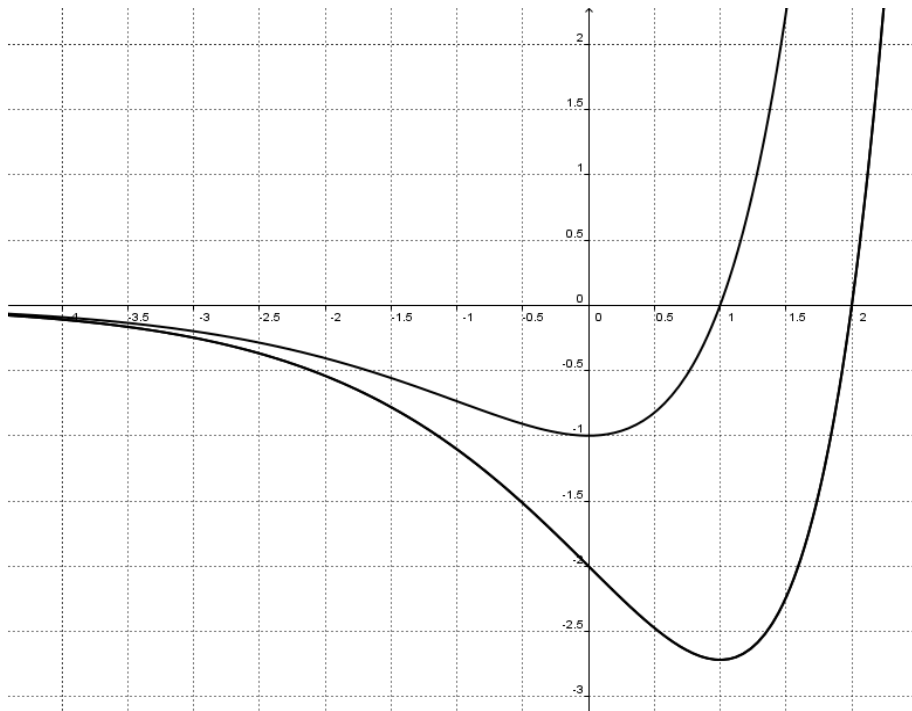
Krümmung:

$f_a''(x) = e^x(x-a+1) + e^x \cdot 1 = e^x(x-a+2) = 0 \Leftrightarrow x = a-2$



c) $f_1(x) - f_2(x) = e^x(x-1) - e^x(x-2) = e^x > 0 \Rightarrow$ Behauptung

d)



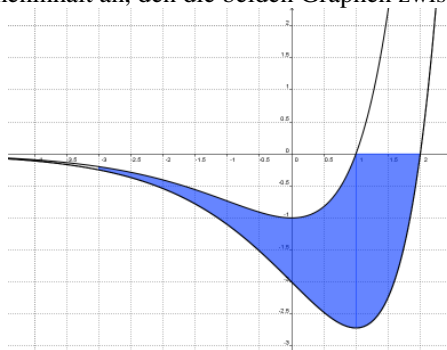
a) Ableiten von $f_{a+1} = e^x (x - a - 1)$ liefert die Behauptung.

b) $\int_0^1 f_1(x) dx = [e^x (x - 2)]_0^1 = -e - (-2) = 2 - e \approx -0,7183$ $\Rightarrow$ der Flächeninhalt ist $A = e - 2$.

c) $A_{\text{Viertelkreis}} = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$

$0,7854 - 0,7183 = 0,0671$ $\frac{0,0671}{0,7183} = 0,09341... \approx 9,3\%$

d) Der Termwert gibt den Flächeninhalt an, den die beiden Graphen zwischen $x = -3$ und ihren Nullstellen einschließen.

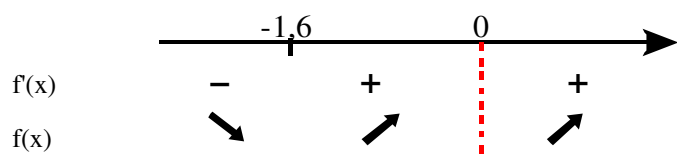


3. $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x} = \frac{x^3 - 8}{4x}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

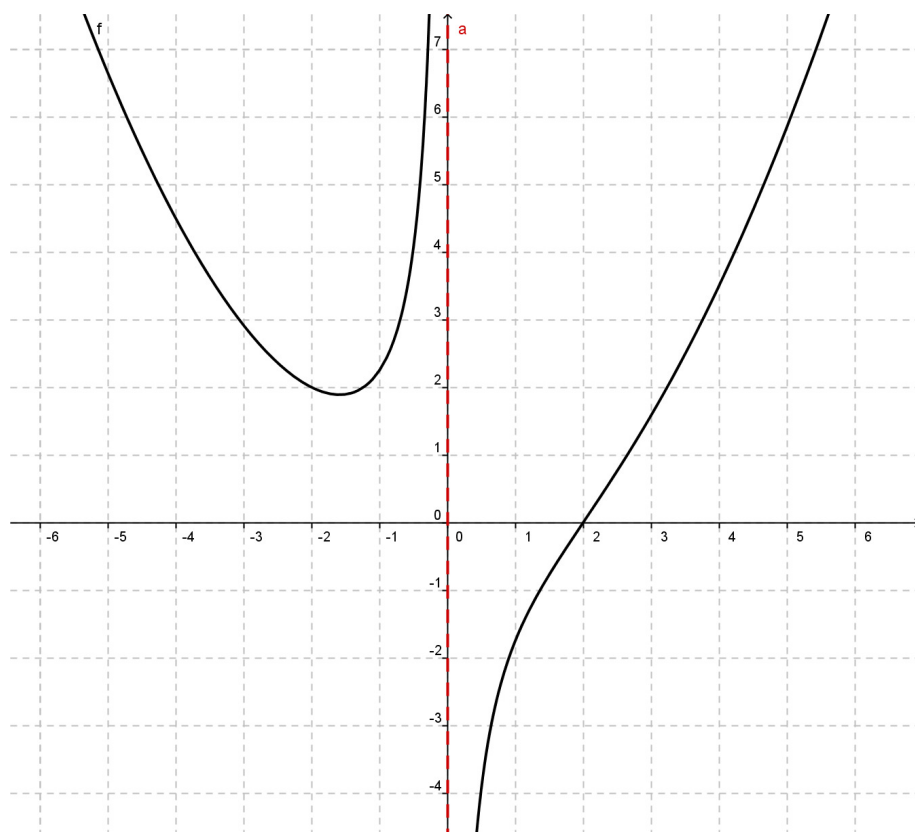
NST ($2/0$), einfache Polstelle $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{x^3 + 4}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{4} \approx -1,6$



TP ($\approx -1,6 / \approx 1,9$)



4.

$$f(x) = \ln x - x + 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$x_1 = 4,5 - \frac{f(4,5)}{f'(4,5)} = 4,50524... \approx 4,51$$

5.

(8) ist die Ableitung von (1)

(3) ist die Ableitung von (6)

(4) ist die Ableitung von (7)

(5) ist die Ableitung von (2)